УДК 502/504 : 691.535

# НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОСНОВАНИЙ ФУНДАМЕНТОВ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕШЕНИЯ КЕЛЬВИНА

Поступила 23.11.2015 г.

© ***А. В. Пилягин***
*Чебоксарский институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)», г. Чебоксары*

# THE STRESS-STRAIN STATE OF THE FOUNDATION OF VARIOUS FORMS USING THE KELVIN EQUATION

Received November 23, 2015

© ***A. V. Pilyagin***
*Cheboksary Institute of Moscow State University of Mechanical Engineering, Cheboksary, Russia*

*В статье рассматривается напряженно-деформированное состояние оснований фундаментов различной формы. Отмечается, что для фундаментов на естественном основании традиционно используется решение Буссинеска (1885 г.) о силе, приложенной к поверхности грунта, т. е. без учета факта заглубления фундаментов, а решение, полученное Миндлиным (1950 г.) учитывает факт заглубления фундаментов, но не рассматривает развитие растягивающих напряжений выше отметки приложения нагрузки. Приводится анализ уравнения Кельвина для сосредоточенной силы, приложенной на бесконечно большой глубине. Выполненный анализ напряженного состояния оснований для заглубленных фундаментов с использованием решения Кельвина указывает на возможность его использования в случае применения фундаментов глубокого заложения.*

*Ключевые слова: грунт, фундамент, напряжение, расчет по деформациям.*

*The article discusses the stress-strain state of Foundation of various forms. It is noted that for foundations on natural basis is traditionally used for the solution of Boussinesq (1885) about the force applied to the ground surface, i.ce. without taking into account the fact that the depth of the foundations, and the solution obtained Mindlin (1950) takes into account the fact that the depth of foundations, but does not consider the development of tensile stresses above the level of application of the load. The analysis of the Kelvin equation for concentrated force applied at an infinitely large depth. The analysis of the stress state of grounds for the buried foundations using solution of Kelvin indicates the possibility of its use in the case of the use of deep foundations.*

*Keywords: soil, Foundation, stress, calculation of deformation.*

Проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений предусматривает оценку напряженного состояния оснований и прогноз перемещений. Для фундаментов на естественном основании традиционно используется решение Буссинеска [1] о силе, приложенной к поверхности грунта, т. е. без учета факта заглубления фундаментов. Решение, полученное Миндлиным [2] учитывает факт заглубления фундаментов, но не рассматривает развитие растягивающих напряжений выше отметки приложения нагрузки. Причем при заглублении фундаментов на глубину более $5b$ ($b$ – ширина подошвы фундамента) значение растягивающих напряжений достигает 50 % от величины приложенного давления. Факт развития растягивающих напряжений действующими нормами РФ в проектировании фундаментов не учитываются.

Наряду с указанными выше решениями имеется также решение Кельвина о сосредоточенной силе, приложенной к телу бесконечной длины [3]. Анализ данного решения представляет практический интерес в виду использования фундаментов с большой глубиной заложения (используются сваи длиной 100 м).

Согласно данному решению вертикальные напряжения и осадки от единичной сосредоточенной силы равны:

$$\sigma_z = \frac{P}{8\pi(1-\mu)}\left[(1-2\mu)\frac{z}{R^3}+\frac{3z^3}{R^5}\right]; \qquad (1)$$

$$S = \frac{P(1+\mu)}{8\pi(1-\mu)E}\left[(3-4\mu)\frac{1}{R}+\frac{z^2}{R^3}\right]; \qquad (2)$$

$$J_1 = z\cdot\int_F\int\frac{d\varphi\ r dr}{(R^2+z^2)^{3/2}} = 1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}; \qquad (3)$$

$$J_2 = 3z^2\int_F\int\frac{d\varphi\ r dr}{(r^2+z^2)^{5/2}} = 1-\frac{1}{\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{3/2}}; \qquad (4)$$

$$J_3 = \int_F \int \frac{d\varphi \, r dr}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \sqrt{R^2+z^2} - z. \quad (5)$$

После подстановки значений полученных интегралов в формулы (1) и (2) получены формулы определения напряжений и перемещений (осадок) по центральной вертикали оснований круглых фундаментов или штампов:

$$\sigma_z = \frac{P}{4(1-\mu)}(1-2\mu)\left[\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{3/2}}\right]\right]. \quad (6)$$

Для центральной вертикали при $z = 0$ напряжения равны $\sigma_z = 0{,}5P$:

$$S = \frac{P\cdot(1+\mu)}{4(1-\mu)}\left\{(3-4\mu)\left[\sqrt{R^2+z^2} - z\right] + \right.$$

$$\left. + \left[z - \frac{z^2}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\right\}. \quad (7)$$

Осадка поверхности штампа (фундамента) при $z = 0$ равна:

$$S = \frac{P(1+\mu)}{4E(1-\mu)}\{(3-4\mu)R\}. \quad (8)$$

Выражение (8) приведено к виду формулы определения осадок круглых штампов путем умножения числителя и знаменателя на $z(1 - \mu)$. Тогда можно записать при $z = 0$:

$$S = \frac{P(1+\mu)}{8E(1-\mu)^2}\{(3-4\mu)d\}. \quad (9)$$

От известной формулы Буссинеска данная зависимость отличается на коэффициент k, значение которого равно

$$k = (3-4\mu)/8(1-\mu)^2. \quad (10)$$

Следовательно, модуль деформации грунта, являясь не физической характеристикой, а параметром связи напряжений и деформаций (закон Гука) при использовании решения Кельвина, а не Буссинеска, будет больше и должен определяться по формуле:

$$E = \frac{P\cdot(1-\mu)^2 dk}{S}. \quad (11)$$

Для определения вертикальных напряжений и осадки ленточных фундаментов необходимо вычислить следующие двойные интегралы:

$$J_4 = \int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z d\eta d\xi}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}} =$$

$$= 2\left(\operatorname{arctg}\frac{x+a}{z} - \operatorname{arctg}\frac{x-a}{z}\right); \quad (12)$$

$$J_5 = 3z^3\int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta d\xi}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{5/2}} =$$

$$= 2\left(\operatorname{arctg}\frac{x+a}{z} - \operatorname{arctg}\frac{x-a}{z} + \frac{4az[(a-z)^2-x^2]}{[x^2+z^2-a^2]^2+4a^2z^2}\right). \quad (13)$$

При определении интеграла:

$$J_6 = \int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta d\xi}{[z^2+y^2+z^2]^{1/2}} = 0, \quad (14)$$

внутренний интеграл в бесконечных пределах равен бесконечности. Для практических расчетов можно взять конечные пределы интегрирования, например, длина $l = 5a$, $a$ – полуширина подошвы ленточного фундамента, тогда:

$$J_6 = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \frac{dx dy}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{1/2}} =$$

$$= (b+y)\ln\frac{a-x+\sqrt{(a-x)^2+(b+y)^2+z^2}}{-a-x+\sqrt{(a-x)^2+(b+y)^2+z^2}} +$$

$$+(b-y)\ln\frac{a-x+\sqrt{(a-x)^2+(b+y)^2+z^2}}{-a-x+\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+z^2}} +$$

$$+(a+x)\ln\frac{b-y+\sqrt{(a+x)^2+(b-y)^2+z^2}}{-b-y+\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+z^2}} +$$

$$+(a-x)\ln\frac{b-y+\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+z^2}}{-b-y+\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+z^2}}. \quad (15)$$

Вертикальные напряжения $\sigma_z$ и осадка S для ленточного фундамента равны:

$$\sigma_z = \frac{P}{8\pi(1-\mu)}[(1-2\mu)J_4 + J_5], \quad (16)$$

$$S = \frac{P(1+\mu)}{8\pi(1-\mu)E}[(3-4\mu)J_6 + zJ_4]. \quad (17)$$

Значения вертикальных напряжений для прямоугольных ленточных и круглых фундаментов при $\mu = 0{,}5$ приведены в таблице.

$$J_7 = \int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \frac{d\xi d\eta}{[(x-z)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{1/2}} =$$

$$= (b+y)\ln\frac{a-x+\sqrt{(a-x)^2+(b+y)^2+z^2}}{-a-x+\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+z^2}} +$$

$$+(b-y)\ln\frac{a-x+\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+z^2}}{-a-x+\sqrt{(a+x)^2+(b-y)^2+z^2}} +$$

$$+(a+x)\ln\frac{b-y+\sqrt{(a+x)^2+(b-y)^2+z^2}}{-b-y+\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+z^2}} +$$

$$+(a-x)\ln\frac{b-y+\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+z^2}}{-b-y+\sqrt{(a-x)^2+(b+y)^2+z^2}}. \quad (18)$$

Значение напряжений $\sigma_z/P$

| $m = 2z/b$ | Круг | Отношение $n = l/b$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 3,0 | 5 | 10 |
| 0 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 |
| 0,4 | 0,474 | 0,480 | 0,484 | 0,485 | 0,487 | 0,487 | 0,487 | 0,488 | 0,488 | 0,488 |
| 0,8 | 0,378 | 0,399 | 0,451 | 0424 | 0,429 | 0,432 | 0,435 | 0,439 | 0,440 | 0,440 |
| 1,2 | 0,273 | 0,303 | 0,326 | 0,341 | 0,351 | 0,358 | 0,363 | 0,374 | 0,377 | 0377 |
| 1,6 | 0,195 | 0,224 | 0,248 | 0,266 | 0,279 | 0,289 | 0,296 | 0,313 | 0,319 | 0,320 |
| 2,0 | 0,142 | 0,165 | 0,189 | 0,207 | 0,220 | 0,231 | 0,240 | 0,262 | 0,272 | 0,278 |
| 2,4 | 0,106 | 0,128 | 0,147 | 0,162 | 0,176 | 0,186 | 0,195 | 0,221 | 0,235 | 0,238 |
| 2,8 | 0,082 | 0,100 | 0,116 | 0,129 | 0,141 | 0,152 | 0,160 | 0,188 | 0,204 | 0,210 |
| 3,2 | 0,065 | 0,080 | 0,093 | 0,105 | 0,115 | 0,125 | 0,133 | 0,161 | 0,180 | 0,186 |
| 3,6 | 0,050 | 0,060 | 0,076 | 0,086 | 0,096 | 0,104 | 0,112 | 0,139 | 0,159 | 0,167 |
| 4,0 | 0,049 | 0,054 | 0,063 | 0,072 | 0,080 | 0,088 | 0,095 | 0,120 | 0,142 | 0,151 |
| 4,4 | 0,036 | 0,045 | 0,053 | 0,061 | 0,068 | 0,075 | 0,081 | 0,105 | 0,127 | 0,138 |
| 4,8 | 0,030 | 0,038 | 0,046 | 0,052 | 0,058 | 0,064 | 0,070 | 0,092 | 0,115 | 0,127 |
| 5,2 | 0,026 | 0,033 | 0,039 | 0,045 | 0,051 | 0,056 | 0,061 | 0,081 | 0,104 | 0,117 |
| 5,6 | 0,022 | 0,024 | 0,034 | 0,039 | 0,044 | 0,049 | 0,054 | 0,072 | 0,099 | 0,108 |
| 6,0 | 0,020 | 0,025 | 0,030 | 0,034 | 0,039 | 0,043 | 0,047 | 0,065 | 0,086 | 0,101 |
| 6,4 | 0,018 | 0,022 | 0,026 | 0,031 | 0,034 | 0,038 | 0,042 | 0,058 | 0,078 | 0,094 |
| 6,8 | 0,015 | 0,020 | 0,024 | 0,027 | 0,031 | 0,034 | 0,038 | 0,053 | 0,072 | 0,088 |
| 7,2 | 0,014 | 0,017 | 0,021 | 0,024 | 0,027 | 0,031 | 0,034 | 0,047 | 0,066 | 0,082 |
| 7,6 | 0,012 | 0,016 | 0,019 | 0,022 | 0,025 | 0,028 | 0,030 | 0,043 | 0,061 | 0,078 |
| 8,0 | 0,011 | 0,014 | 0,017 | 0,020 | 0,023 | 0,025 | 0,028 | 0,039 | 0,056 | 0,073 |
| 8,4 | 0,010 | 0,013 | 0,016 | 0,018 | 0,021 | 0,023 | 0,025 | 0,036 | 0,052 | 0,069 |
| 8,8 | 0,009 | 0,012 | 0,014 | 0,016 | 0,019 | 0,021 | 0,023 | 0,033 | 0,048 | 0,065 |
| 9,2 | 0,008 | 0,011 | 0,013 | 0,015 | 0,017 | 0,019 | 0,021 | 0,031 | 0,045 | 0,062 |
| 9,6 | 0,008 | 0,010 | 0,012 | 0,014 | 0,016 | 0,018 | 0,019 | 0,028 | 0,042 | 0,060 |
| 10,0 | 0,007 | 0,009 | 0,011 | 0,013 | 0,015 | 0,017 | 0,018 | 0,026 | 0,039 | 0,056 |
| 10,4 | 0,006 | 0,008 | 0,010 | 0,012 | 0,014 | 0,015 | 0,017 | 0,024 | 0,037 | 0,053 |
| 10,8 | 0,006 | 0,008 | 0,009 | 0,011 | 0,013 | 0,014 | 0,016 | 0,022 | 0,034 | 0,050 |
| 11,2 | 0,006 | 0,007 | 0,009 | 0,010 | 0,012 | 0,013 | 0,015 | 0,021 | 0,032 | 0,048 |
| 11,6 | 0,005 | 0,007 | 0,008 | 0,009 | 0,011 | 0,012 | 0,014 | 0,020 | 0,030 | 0,046 |
| 12,0 | 0,005 | 0,006 | 0,007 | 0,009 | 0,010 | 0,011 | 0,013 | 0,018 | 0,028 | 0,044 |

$$J_8 = z^2 \int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \frac{z^2 d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}} =$$

$$= z\left[\operatorname{arctg}\frac{(a-x)(b+y)}{[(a-x)^2+(b+y)^2+z^2]^{1/2}}\right] +$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{(a+x)(b+y)}{z[(a+x)^2+(b+y)^2+z^2]^{1/2}} +$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{(a-x)(b+y)}{z[(a-x)^2+(b-y)^2+z^2]^{1/2}} +$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{(a+x)(b-y)}{z[(a+x)^2+(b-y)^2+z^2]^{1/2}}. \qquad (19)$$

$$J_9 = 3z^3 \int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \frac{d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{5/2}} =$$

$$= \frac{z\,(x+a)(y+b)\left[(x+a)^2+(y+b)^2+2z^2\right]}{[(x+a)^2+z^2][(y+b)^2+z^2][(x+a)^2+(y+b)^2+z^2]^{1/2}} -$$

$$-\frac{z\,(x+a)(y-b)\left[(x+a)^2+(y-b)^2+2z^2\right]}{[(x+a)^2+z^2][(y-b)^2+z^2][(x+a)^2+(y-b)^2+z^2]^{1/2}} +$$

$$+\frac{z\,(x-a)(y-b)\left[(x-a)^2+(y-b)^2+2z^2\right]}{[(x-a)^2+z^2][(y-b)^2+z^2][(x-a)^2+(y-b)^2+z^2]^{1/2}} -$$

$$-\frac{z\,(x-a)(y-b)\left[(x-a)^2+(y+b)^2+2z^2\right]}{[(x-a)^2+z^2][(y+b)^2+z^2][(x-a)^2+(y+b)^2+z^2]^{1/2}} +$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{(x+a)(y+b)}{z\,[(x+a)^2+(y+b)^2+z^2]^{1/2}} -$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{(x+a)(y-b)}{z\,[(x+a)^2+(y-b)^2+z^2]^{1/2}} +$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{(x-a)(y-b)}{z\,[(x-a)^2+(y-b)^2+z^2]^{1/2}} -$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{(x-a)(y+b)}{z[(x-a)^2+(y+b)^2+z^2]^{1/2}}. \qquad (20)$$

Некоторые результаты вычисления вертикальных напряжений для фундаментов различной формы приведены в таблице.

**Заключение**

Полученные решения на основе задачи Кельвина по оценке напряженно-деформированного состояния оснований фундаментов не противоречат законам механики грунтов и будут способствовать повышению эффективности проектов.

*Библиографический список*


1. Boussinesq J. Aplication des Potentiels a letudeleduilibreet du mouvement des solidesellastique. – Paris, 1885. – 720 p.

2. Mindlin R. D. Force at a point in the interier of a semi-infinite solid // Phisics. – 1963. – Vol.7. – P. 195–202.

3. Тимошенко С. П., Гутьер Дж. Теория упругости. – М: Наука, 1975. – Т. 1 – 832 с.



**Сведения об авторе**

***Пилягин Алексей Васильевич,*** *доктор технических наук, профессор (e-mail: pilyagin.alexei@yandex.ru)*

**Information about the author**

***Piliagin Aleksei Vasilevich,*** *doctor of technical sciences, professor (e-mail: pilyagin.alexei@yandex.ru)*